P14–16习题3. 设是前个自然数所成集合，即。是的一个变换。（2）如果是满射，证明必然是单射。

证：设有两个不同的数，若，那么不可能是满射，因为像元素个数小于。

P14–16习题5. 全体有理数集合记为，全体偶数所成集合记为，把中的数按分母大小排成如下表格

   
排列顺序按箭头所示，后面有一个数和前面相同时(例如)，去掉后面相同的数，如此得到一个序列



定义到的映射如下：，证明是一个双射。

证：先证明是单射。按照映射规则，如果，那么这两个有理数必然处于中不同的位置，所以必然有，即是单射。

再证明是满射。很显然，每一斜行中元素与前个斜行中所有的元素都不相等，所以，这说明前个斜行中必有一个元素，使得。于是中每个元素都有原像，是满射。

P14–16习题13. 设是两个数域，证明仍为数域的充要条件是或。

证：充分性显然。

必要性：否则，必有，显然。考虑元素，因为仍为数域，所以。若，矛盾；类似有矛盾。

P14–16习题14. 设全体有理数集合，是的一个变换。证明：对任意，；的充要条件是或为零变换。

证：充分性显然。

必要性：；

或；

当，由上述可知；

当，由上述可知。

P14–16习题15. 设是到复数域的一个映射，且对任意，；，证明只能是下列三种映射之一：

（1） （2）

（3）

证： ；

或；

当，由上述可知；此时，，所以。于是



当，由上述可知。此时，，所以或。于是

P46习题5(1) 

**解**：方程组增广矩阵为



所以当时，从第一个箭头后面的矩阵可知无解。所以当时，从第二个箭头后面的矩阵可知解为，任取。当时，得唯一解：

P47习题7 

**解**：方程组系数矩阵阶梯化为



所以方程组可以变成



所以当为偶数，方程组只有零解；所以当为奇数，方程组有通解。

P47习题10. 给定数域内个数，设是个未知量，求下列方程组的全部解：

，

其中。

**解**：如果有某个，那么因为，所以，，代入原方程组可知这是一个通解。否则，如果，那么可以是内任何个数。

P65习题1给定内向量组



将表示为的线性组合。

**解**：即是求，使得，或者，用矩阵消元法解方程组：



最后得到方程组：



解得 

取，得 

或者取，得 

**P65–69** 习题6 证明：如果向量组线性无关，加上向量以后线性相关，那么可被向量组线性表示。   
 证： 线性相关，存在不全为零的使得

 （1）  
这里，否则，那么不全为零并且上式成立，导致

线性相关。因为，由（1）式可得，因此那么可被向量组线性表示。

13题由6题显然。

P65-69 习题14 证明：如果向量组的秩为，证明其中任意个线性无关的向量都可以构成一个极大线性无关部分组。

**证：**将中任何一个向量加入到这个线性无关的向量中，那么因为最多有个向量线性无关，所以这个向量线性相关。由第6题的结论，可由这个向量线性表示。于是他们是一个极大线性无关部分组。

P65-69 习题18 向量组是维线性空间中的向量，证明线性无关的充要条件是中的任何向量可由它们线性表示。

**证**：（必要性）,加上向量以后必然线性相关，这是因为这一向量组可由向量组（见P58例7）线性表示，由命题1.4，必然线性相关。再由6题可知可由线性表示。

（充分性）中的任何向量可由线性表示，于是向量组可由它们线性表示。假设线性相关，设它的极大线性无关部分组为，那么。于是可由线性表示且，再由命题1.4，线性相关，矛盾。

P81 习题5 设为数域上的矩阵。若以表示可以经过行列初等变换化为，证明是矩阵集合中的等价关系。证明当时，可以经过列初等变换化为



其中右侧0为零矩阵。

证：（1）因为矩阵的初等变换是可逆的，等价关系显然。

（2）用数学归纳法。当时，命题显然成立。设命题对行矩阵成立。对矩阵，因为秩为，第一行元素不可能全部为0，于是总可以用互换两列的办法使得的左上角元素不为零，于是不妨设左上角元素。其它各列减去第一列适当倍数，得



由归纳假设，右下角可用初等列变换化为



的形式，进而有  
。

P83 习题12设为数域上的矩阵。从中任取行，得到矩阵，证明：。

**证**：中行向量的极大线性无关组含个行向量，设为。将其扩张为的行向量的极大线性无关组，含有个行向量（这可以用筛选法完成），设为。考虑中除以外的行向量，它们可由线性表示，所以都不在向量组中，也就是都在的除以外的行向量中。所以的除以外的行向量个数，这也就是。

P97 习题8 求数域解上下列线性方程组的一个特解和导出组的一个基础解系，然后用它们表示出方程组的全部解

(1) 

解：对方程组的增广矩阵做初等行变换



所以原方程组等价于



取 得原方程组的一个特解，

原方程组的导出组为



分别取，得导出组的基础解系为

，

所以原方程组的全部解为



其中为数域中的任何数。

(2) 

解：对方程组的增广矩阵做初等行变换



所以原方程组等价于



取 得原方程组的一个特解，

原方程组的导出组为



取，得导出组的基础解系为

，

所以原方程组的全部解为



其中为数域中的任何数。

P136 习题1(4) （可先试做2,3次方，然后用数学归纳法证明）

(5) 

(当为偶数) ；

(当为奇数)

P137 习题4. 求所有与可交换的3阶方阵。

解：设可与可交换的3阶方阵为，那么有



比较得于是。并且

P138 习题8. 设为偶数，证明存在实数域上的解方阵，使得。

证：当*=2*，由，要使得，必有，于是。当为大于2的偶数，显然。

P270 习题28 将上全体列线性函数所成的集合记作，在内定义加法和数域内的数乘运算如下：

加法：对，令 ;

数乘：对任意，令 

证明关于上述加法、数乘构成上的线性空间。

令证明由下列函数值唯一决定：

 （分别取值）

任给内个数 （分别取值），证明存在唯一的，满足



求线性空间的维数和一组基。

将上全体反对称列线性函数所成的集合记作（），证明是的子空间，求的维数和一组基。

证明：逐条验证满足线性空间8条性质，略。其中零函数为，，函数的负元为，。

因为由列线性，对任意



对任一函数，如果有 （分别取值），那么由类似于上述计算，对任意



所以，由 （分别取值）的函数值唯一决定。

（3）对任意，取

 （\*）

那么满足，这只要在上式中固定后，取，而当时，取。

还需要证明是列线性函数。设的第列可写成中列向量



代入（\*）式得



所以是列线性函数。

由（2）可知，如果给定个函数,满足

， （分别取值），

那么，，成立



 （\*\*）

这就是说是个函数的组合，其系数为，系数与有关。

还需证明个函数线性无关。假设有零函数组合



其中零函数满足。那么分别取，（分别取值），代入，得

，

（分别取值），所以的维数为，基为（分别取值）。

（5）根据定义，反对称列线性函数还是列线性函数，所以。当，必有



所以，是的线性子空间。

考虑（\*\*）式，假设，那么当矩阵中有两列相同时，必有。所以（\*\*）中如果下标有两个相同者，必有，所以（\*\*）式可写成

，

（是的一个排列，代表对所有的的排列求和）

所以的基为（是的一个排列），维数为。

（本题答案参考了10级王道蓬同学的作业，愚公移山，写了两天）

以下的是王道蓬同学关于第（5）问的答案，是的线性子空间这一部分省略，大同小异。而关于基和维数部分和我的结果不同，请同学们判断一下，哪个是对的？

，

当不满秩时，由第三章命题2.1的推论2，得。

当满秩时，可由一序列初等列变换化为单位矩阵。即

，为初等矩阵，。

于是，又由第三章命题2.1及列线性函数的定义，有，使得

 （i）

又已知上的行列式函数，于是

且 （ii）

由（i）(ii)式得 

这样，，由的值唯一确定。又对取中任何值，容易证，因此，，使得，所以，是它的一组基.

P329 习题24 设是数域上维线性空间内的线性变换，。证明存在正整数，使得线性无关，而



如果令，证明是的不变子空间，进而证明的特征多项式为。

**证明**：因为的维数为，所以个向量必然线性相关。所以存在正整数，使得线性无关，而



显然是的子空间。，必有



所以是的不变子空间。以为线性子空间的基，那么



令上式中矩阵为，那么（这只要将行列式按最后一列展开；或者从最后一行起，最后一行乘以加到倒数第二行，倒数第二行乘以加到倒数第三行，，第二行乘以加到第一行，然后按第一行展开）这就说明的特征多项式为。

P329 习题25证明Hamilton-Cayley定理：如果是数域上维线性空间内的线性变换，其特征多项式为，那么。

**证明**：任取，如24题所示，存在正整数，使得线性无关，而

 （1）

而且 是的不变子空间。而且的特征多项式为。由（1）式，可知，必有。

如果，那么如同取定那样依次取定，使得。例如，如果取定， ，

那么，对施行与相同的过程，可得到存在正整数，使得线性无关，而

 （*r*）

而且 是的不变子空间。而且的特征多项式为。由（*r*）式，可知，必有。

容易证明，，并且

为的一组基。事实上，设，，如果，那么，于是，这导致，与是的不变子空间矛盾。类似可证。于是，并且

为的一组基。于是由第24题的结果





其中



而的特征多项式为，，必有，，而



所以。

P359习题4.求二次型的标准型（9）

解：当，令，得

当，，令



所以，令



P197习题6. 设包含个非零复数，关于复数乘法构成阶群，证明

**证明**（10级王道蓬）：1）显然，，事实上，设是的单位元，则，又，所以。

2）设，则，由鸽巢原理，必有，使得，因而，由知，又，故，于是。

3）为方便起见，，约定记号，注意到有唯一的，使得，称为的主值，并记，以后对的讨论化归为对其主值的讨论。

，可以证明以下性质：

1. 。
2. 若。
3. 若，。

性质i),ii)是显然的，当时，性质iii)是ii)的直接推论，当时，注意到，故iii)成立。由ii), iii)，立即有

1. 若， 则，有。

4）设，则，（由鸽巢原理知）必有，使，即，故。

5）设中的个数为，不妨设，且，即是中最小正数。设，且。于是，使。因此。又由知，故，故。

6）由，知。易知，否则，那么，于是，这与是阶群矛盾。下面证明，使得。假设，有，那么，使，因此。由于是中最小正数，所以。但是由，知，，矛盾。所以，。

所以，故，，故，亦即

